حل تکلیف سری چهارم درس ریاضی عمومی ۱

۱. انتگرال‌های زیر را به کمک روش تغییر متغیر حل کنید.

الف) $\int x^{۲}\sqrt{x^{۳}+۸}\,dx$ ب) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-۱}}$ ج) $\int \frac{\ln(x^{x})+۳}{x^{۲}}$

پاسخ:

الف) فرض کنیم $u=x^{۳}+۸$ بنابراین $du=۳x^{۲}dx$ یا $\frac{۱}{۳}du=x^{۲}dx$، پس داریم:

$$\int x^{۲}\sqrt{x^{۳}+۸}\,dx=\int \frac{۱}{۳}\sqrt{u}du=\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{۳}\sqrt{u^{۳}}+c=\frac{۲}{۹}\sqrt{(x^{۳}+۸)^{۳}}+C$$

ب) فرض کنیم $u^{۲}=x-۱$ بنابراین $۲udu=dx$ و $x=u^{۲}+۱$ پس داریم:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x-۱}}=\int\frac{۲u\,du}{u(u^{۲}+۱)}=۲\tan^{-۱}u+c=۲\tan^{-۱}(\sqrt{x-۱})+c$$

ج) با توجه به اینکه $\ln x^{x}=x\ln x$ داریم :

$$\frac{\ln(x^{x})+۳}{x^{۲}}=\frac{\ln x}{x}+\frac{۳}{x^{۲}}$$

حال فرض کنیم $u=\ln x$ پس $du=\frac{dx}{x}$ و بنابراین

$$\int(\frac{\ln x}{x}+\frac{۳}{x^{۲}})dx=\int udu-\frac{۳}{x}+c=\frac{۱}{۲}u^{۲}-\frac{۳}{x}+c=\frac{۱}{۲}(\ln x)^{۲}-\frac{۳}{x}+c$$

حل تکلیف سری چهارم درس ریاضی عمومی ۱

۲. انتگرال‌های زیر را به کمک روش جزء به جزء حل کنید.

الف) $\int x \tan^{-۱} x \, dx$ ب) $\int \sqrt[۵]{x^۳} \ln x \, dx$ ج) $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$

پاسخ:

الف) فرض کنیم $u = \tan^{-۱} x$ و $dv = x\, dx$ بنابراین $du = \dfrac{dx}{۱+x^۲}$ و $v = \dfrac{x^۲}{۲}$، پس با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$\begin{aligned}
\int x \tan^{-۱} x dx &= \frac{x^۲}{۲}\tan^{-۱} x - \frac{۱}{۲}\int \frac{x^۲}{۱+x^۲}\, dx \\
&= \frac{x^۲}{۲}\tan^{-۱} x - \frac{۱}{۲}\int (۱ - \frac{۱}{۱+x^۲}) dx \\
&= \frac{x^۲}{۲}\tan^{-۱} x - \frac{x}{۲} + \frac{۱}{۲}\tan^{-۱} x + c \\
&= (\frac{x^۲+۱}{۲})\tan^{-۱} x - \frac{x}{۲} + c
\end{aligned}$$

ب) فرض کنیم $u = \ln x$ و $dv = \sqrt[۵]{x^۳} dx$ بنابراین $du = \dfrac{dx}{x}$ و $v = \dfrac{۵}{۸}\sqrt[۵]{x^۸}$، پس با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt[۵]{x^۳} \ln x \, dx &= \frac{۵}{۸}\sqrt[۵]{x^۸}\ln x - \frac{۵}{۸}\int \sqrt[۵]{x^۳}\, dx \\
&= \frac{۵}{۸}\sqrt[۵]{x^۸}\ln x - \frac{۲۵}{۶۴}\sqrt[۵]{x^۸} + c
\end{aligned}$$

ج) ابتدا فرض کنیم $x = t^۲$ بنابراین $dx = ۲t\, dt$ و خواهیم داشت: $\int e^{\sqrt{x}}\, dx = \int ۲te^t dt$ پس فرض کنیم $u = t$ و $dv = e^t\, dt$ بنابراین $du = dt$ و $v = e^t$، پس با استفاده از روش جزء به جزء داریم:

$$\begin{aligned}
\int e^{\sqrt{x}}\, dx &= \int ۲te^t dt \\
&= ۲te^t - ۲e^t + c \\
&= ۲\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}} + c
\end{aligned}$$

حل تکلیف سری چهارم درس ریاضی عمومی ۱

۳. انتگرال‌های زیر را به کمک روش تغییرمتغیر مثلثاتی حل کنید.

الف) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ ب) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{3x^2}\,dx$ ج) $\displaystyle\int e^x(1-e^{2x})^{\frac{3}{2}}\,dx$

پاسخ:

الف) هرگاه قرار دهیم: $x = \sin t$ آنگاه $dx = \cos t\; dt$ و خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int \frac{\sin^3 t}{\cos t}\cos t dt \\
&= \int \sin t(1-\cos^2 t)\; dt \\
&= -\cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t + c \\
&= \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + c
\end{aligned}$$

ب) هرگاه قرار دهیم: $x = 3\sec t$ آنگاه $dx = 3\sec t\tan t\; dt$ و خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{3x^2}\,dx &= \int \frac{3\tan t}{27\sec^2 t}(3\sec t\tan t)dt \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{\sin^2 t}{\cos t}dt \\
&= \frac{1}{3}\int (\sec t - \cos t)\; dt \\
&= \frac{1}{3}\ln(sect + \tan t) - \frac{1}{3}\sin t + c \\
&= \frac{1}{3}\ln(\frac{x+\sqrt{x^2-9}}{3}) - \frac{1}{3}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x} + c
\end{aligned}$$

ج) هرگاه قرار دهیم: $e^x = \sin t$ آنگاه $e^x\; dx = \cos t\; dt$ و خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
\int e^x(۱-e^{۲x})^{\frac{۳}{۲}}\,dx &= \int \cos^۳ t\cos t\,dt \\
&= \int (\frac{\cos ۲t+۱}{۲})^۲ dt \\
&= \frac{۱}{۴}\int (\frac{\cos ۴t+۱}{۲}+۲\cos ۲t+۱)\,dt \\
&= \frac{۱}{۳۲}\sin ۴t+\frac{۱}{۴}\sin ۲t+\frac{۳t}{۸}+c \\
&= \frac{۱}{۸}e^x\sqrt{۱-e^{۲x}}\sqrt{۱-۴e^{۲x}(۱-e^{۲x})}+\frac{۱}{۲}e^x\sqrt{۱-e^{۲x}}+\frac{۳\sin^{-۱}(e^x)}{۸}+c
\end{aligned}
$$

حل تکلیف سری چهارم درس ریاضی عمومی ۱

۴. انتگرال های زیر را به کمک روش تجزیه‌ی کسرها حل کنید.

الف) $\int \frac{x^۲ - x + ۱}{x^۳ - x^۲}\, dx$

ب) $\int \frac{۱۱x^۲ - ۴}{x^۵ + ۴x^۳ - ۳x}$

پاسخ:

الف)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^۲ - x + ۱}{x^۳ - x^۲}\, dx &= \int (\frac{۱}{x-۱} - \frac{۱}{x^۲})\, dx \\ &= \ln|x-۱| + \frac{۱}{x} + c\end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned}\int \frac{۱۱x^۲ - ۴}{x^۵ + ۲x^۳ - ۳x}\, dx &= \int \frac{۱۱x^۲ - ۴}{x(x^۲+۳)(x-۱)(x+۱}dx \\ &= \int (\frac{\frac{۴}{۳}}{x} - \frac{\frac{۳۷}{۱۲}x}{x^۲+۳} + \frac{\frac{۷}{۸}}{x-۱} + \frac{\frac{۷}{۸}}{x+۱})dx \\ &= \tfrac{۴}{۳}\ln|x| - \frac{۳۷}{۲۴}\ln|x^۲+۳| + \frac{۷}{۸}(\ln|x-۱| + \ln|x-۱|) + c\end{aligned}$$

حل تکلیف سری چهارم درس ریاضی عمومی ۱

۵. در صورت لزوم با استفاده از چند روش، انتگرال های زیر را حل کنید.

الف) $\int \frac{e^x}{e^{2x}-4}\,dx$

ب) $\int \ln(x^2+2x+2)\,dx$

ج) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(2+\sqrt[4]{x})}$

د) $\int \frac{4x}{(x^2-2x+2)^2}\,dx$

ه) $\int \frac{\cos x}{2-\cos x}\,dx$

پاسخ:

الف) با استفاده از روش تغییر متغیر و تجزیه کسرها، با فرض $u = e^x$ یا بطور معادل $x = \ln u$ داریم: $dx = \frac{du}{u}$ و یا $e^x dx = du$. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{e^{2x}-4}\,dx &= \int \frac{du}{u^2-4}\\ &= \int \frac{du}{(u-2)(u+2)}\\ &= \frac{1}{4}\int (\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u+2})du\\ &= \frac{1}{4}(\ln|u-2|-\ln|u+2|)+c\\ &= \frac{1}{4}\ln|\frac{u-2}{u+2}|+c\\ &= \frac{1}{4}\ln|\frac{e^x-1}{e^x+1}|+c\end{aligned}$$

ب) با استفاده از روش جزء به جزء با فرض $u = \ln(x^2+2x+2)$ و $dv = dx$ داریم: $du = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx$ و $v = x$. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\int \ln(x^2+2x+2)\,dx &= x\ln|x^2+2x+2| - 2\int \frac{x^2+x}{x^2+2x+2}dx\\ &= x\ln|x^2+2x+2| - \int (2-\frac{2x+2}{x^2+2x+2}-\frac{2}{(x+1)^2+1})dx\\ &= x\ln|x^2+2x+2| - 2x + \ln|x^2+2x+2| + 2\tan^{-1}(x+1)+c\\ &= (x+1)\ln|x^2+2x+2| - 2x + 2\tan^{-1}(x+1)+c\end{aligned}$$

ج) با استفاده از روش تغییر متغیر و تجزیه کسرها، با فرض $x = u^4$ داریم: $dx = 4u^3 du$. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x}(2+\sqrt[4]{x})} &= \int \frac{4u^3 du}{u^2(2+u)} \\ &= \int \frac{4u\, du}{2+u} \\ &= \int (4 - \frac{8\, du}{2+u}) \\ &= 4u - 8\ln|2+u| + c \\ &= 4\sqrt[4]{x} - 8\ln|2+\sqrt[4]{x}| + c\end{aligned}$$

د) با استفاده از تغییر متغیر $x - 1 = \tan t$ و در نتیجه $dx = \sec^2 t\, dt$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\int \frac{4x}{(x^2-2x+2)^2}\, dx &= \int \frac{4(1+\tan t)\sec^2 t}{(1+\tan^2 t)^2} dt \\ &= \int 4(1+\tan t)\cos^2 t\, dt \\ &= \int 4(\frac{\cos 2t + 1}{2} + \sin t \cos t) dt \\ &= \sin 2t + 2t - 2\cos^2 t + c \\ &= 2\tan^{-1}(x+1) + \frac{2(x-1)}{x^2-2x+2} - \frac{1}{(x^2-2x+2)} + c\end{aligned}$$

ه)

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{2-\cos x}\, dx &= \int (-1 + \frac{2}{2-\cos x}) dx \\ &= -x + 2\int \frac{1+\tan^2(\frac{x}{2})}{3\tan^2(\frac{x}{2})+1} dx \\ &= -x + 2\int \frac{du}{3u^2+1} \\ &= -x + \frac{2\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}(\sqrt{3}u) + c \\ &= -x + \frac{2\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}(\sqrt{3}\tan(\frac{x}{2})) + c\end{aligned}$$